Bhaskara II, Bijaganita, parts 1-3 (clean public components)

English Translation

Modern LaTeX Editions of Public-Domain Mathematics Manuscripts

---

About this reader

- Reader type - English Translation.
- The visible PDF is the front-facing translation reader; source TeX and support material are in the ZIP artifacts.
- 1 source-rendered component(s) for this work are preserved in the ZIP archives but omitted from this reader until a clean rerender is available.

बीजगणितमध्यगणितं वा

श्रीभास्कराचार्यविरचितम् ।

बीज

अव्यक्त

यावत्तावत्x

रूप

वर्ण

करणी

समीकरण

धन

ऋण

विषयसूची

घनाणां सङ्कलनम्
घनानां व्यवकलनम्
घनानां गुणनम्
घनानां भागहारः
घनानां वर्गो मूलं च
अव्यक्तसङ्कलनव्यवकलनम्
अव्यक्तगुणनम्
अव्यक्तभागहारः
अव्यक्तवर्गादि
अनेकवर्णीद्विपद्विभ्रम
करणीसङ्कलनव्यवकलनम्
करणीगुणनम्
करणीभजनम्
करणीवर्गः
करणीमूलम्
कुट्टकः
वर्गप्रकृतिः
चक्रवालम्
एकवर्णसमीकरणबीजम्
असकृत्वर्गादिसमीकरणम्
बहुवर्णसमीकरणम्
अनेकवर्णमध्यमाहरणम्
भावितम्
प्रत्येकसंहारः
प्रदिशविद्यया
नवीनप्रदिशविद्यया

श्रीगणेशाय नमः

अथ बीजगणितम्

उपोद्घातः

श्रीं ॐ मते बलवते हनुमते नमः ।

उत्पादकं यत् प्रवदन्ति बुद्धेः स्थितं सुरैरपि ।
अस्य क्रिया तत्कथयाम्यथवा तद्बीजमष्टधा ॥

पूर्वं प्रोक्तं व्यक्तमस्य कथये प्रज्ञा ते च मेऽव्यक्तयुक्तया ।
यं तु शक्या मन्दबुद्धिर्न तत्समं न तद् द्वयं वीजक्रिया च ॥

x

x

$+-$

ब्रह्मस्फुटसिद्धान्ते च कालक्रियायां तथैव च ।
ग्रहगणितं निगदितं त्रैराशिकफलं तथा ॥

घनाणां सङ्कलनम्

घनाणां सङ्कलने करणसूत्रं बुद्धये

घनाः समं सङ्गुणिता द्वित्रिभिः समन्विताः
एकघनाद्विवर्जितास्ते सङ्कलिताः स्युः सदा घनाः ॥ १ ॥

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = \left(\frac{5 \cdot 6}{2}\right)^2$$
$$= 15^2 = 225$$

$1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225$

n

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = \left(\frac{5 \cdot 6}{2}\right)^2$$
$$= 15^2 = 225$$

$1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225$✓

घनानां व्यवकलनम्

व्यस्तद्वयोर्घनयोर्व्यस्तयोर्घनयोर्व्यवकलनम् ।
समघ्नयोरपि तथा व्यवकलनं सम्भवत्येव ॥ २ ॥

ab

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(y\bar{a}5)^3 - (y\bar{a}2)^3 = 125y\bar{a}^3 - 8y\bar{a}^3$$
$$= 117y\bar{a}^3$$

$(5-3)(25+15+9) = 2 \cdot 49 = 98$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(5y\bar{a})^3 - (2y\bar{a})^3 = 125y\bar{a}^3 - 8y\bar{a}^3$$
$$= 117y\bar{a}^3$$

$(5-3)(25+15+9) = 2 \cdot 49 = 98$

घनानां गुणनम्

घनयोर्घनयोर्घनयोर्वा गुणनं सम्भवति ।
घनघातः सम्भवत्येवं गुणकारघनयोः समं ॥ ३ ॥

$$a^3 \times b^3 = (ab)^3$$

$$\begin{aligned}(3y\bar{a})^3 \times (2y\bar{a})^3 &= (6y\bar{a})^3 \\ &= 216y\bar{a}^3\end{aligned}$$

$$a^3 \times b^3 = (ab)^3$$

$$\begin{aligned}(3y\bar{a})^3 \times (2y\bar{a})^3 &= (6y\bar{a})^3 \\ &= 216y\bar{a}^3\end{aligned}$$

घनानां भागहारः

घनं घनेन विभजेद् घनमूलयोर्मूलयोरिव ।
घनभागः स्तः सम्भवत्येवं भागकारयोः समं ॥ ४ ॥

$$\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

$$\frac{(8y\bar{a})^3}{(2y\bar{a})^3} = \left(\frac{8y\bar{a}}{2y\bar{a}}\right)^3$$
$$= (4y\bar{a})^3 = 64y\bar{a}^3$$

$$\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

$$\frac{(8y\bar{a})^3}{(2y\bar{a})^3} = \left(\frac{8y\bar{a}}{2y\bar{a}}\right)^3$$
$$= (4y\bar{a})^3 = 64y\bar{a}^3$$

घनानां वर्गो मूलं च

घनस्य वर्गः स्यात् षट्ठी घनस्य मूलं तु मूलघनम् ।
वर्गमूलं घनमूलं च कल्पनीयं ततस्ततः ॥ ५ ॥

$$(a^3)^2 = a^6$$
$$\sqrt[3]{a^3} = a$$
$$\sqrt{a^3} = a^{3/2}$$

$$(a^3)^2 = a^6$$
$$\sqrt[3]{a^3} = a$$
$$\sqrt{a^3} = a^{3/2}$$

अव्यक्तसङ्कलनव्यवकलनम्

(१) यावत्तावत् कालक नीलक पीतक हरितकादयः ।
वर्णाः पीतो हरितश्चेत् द्वयं च अव्यक्तानां कल्पना मतसंज्ञा—
राशिसंख्यानां कल्पिता मताचार्येण ॥ ६ ॥

$xyzuv$

$xyzuv$

$$(y\bar{a}1 + k\bar{a}1) + (y\bar{a}2 + k\bar{a}8) = y\bar{a}3 + k\bar{a}9$$
$$(y\bar{a}5 + k\bar{a}3) - (y\bar{a}2 + k\bar{a}8) = y\bar{a}3 + k\bar{a}\bar{5}$$

$xyzuv$

$$(y\bar{a}1 + k\bar{a}1) + (y\bar{a}2 + k\bar{a}8) = y\bar{a}3 + k\bar{a}9$$
$$(y\bar{a}5 + k\bar{a}3) - (y\bar{a}2 + k\bar{a}8) = y\bar{a}3 + k\bar{a}\bar{5}$$

अव्यक्तगुणनम्

अव्यक्तवर्गविधम्

अव्यक्ताकृतयोः समस्य हेतोः समेत्य वर्गद्वयं कल्पयेत् ।
तदा तयोर्वर्गयोर्वर्गः सम्भवत्येवमेकस्य वर्गः ॥ ७ ॥

वर्गः

$(y\bar{a}5 + k\bar{a}3) \times (y\bar{a}3 + k\bar{a}2) = y\bar{a}v15 + y\bar{a}19 + k\bar{a}6$

$(5y\bar{a} + 3k\bar{a}) \times (3y\bar{a} + 2k\bar{a}) = 15y\bar{a}^2 + 19y\bar{a} + 6k\bar{a}$

$y\bar{a}5k\bar{a}\bar{3}y\bar{a}3k\bar{a}2y\bar{a}v15 + y\bar{a}\bar{1} + k\bar{a}\bar{6}$

$(5y\bar{a} - 3k\bar{a}) \times (3y\bar{a} + 2k\bar{a}) = 15y\bar{a}^2 + y\bar{a} - 6k\bar{a}$

अव्यक्तभागहारः

भागाहरे करणसूत्रं बुद्धये ।
भाज्यच्छेदः सृजति प्रच्युतः सन् क्षेपे क्षेपे स्थानक्षेपं क्षेपेण ।
दैन्यैर्द्विजैः सङ्गुणो यैः क्षेपैर्भागाहरे लब्धयस्तः स्पृशेत्

$y\bar{a}18k\bar{a}24k\bar{a}6y\bar{a}5$

$18y\bar{a} + 24k\bar{a}5y\bar{a} + 6k\bar{a}$

$y\bar{a}v10 + y\bar{a}27 + y\bar{a}18 + k\bar{a}24$

$y\bar{a}5 + k\bar{a}6$

$y\bar{a}2 + y\bar{a}3 + k\bar{a}4$

$10y\bar{a}^2 + 27y\bar{a} + 18y\bar{a} + 24k\bar{a}$

$5y\bar{a} + 6k\bar{a}$

$2y\bar{a} + 3y\bar{a} + 4k\bar{a}$

अव्यक्तवर्गादि

वर्गः प्रथमं ततो घनोऽथ वर्गवर्गस्ततोऽष्टघातः ।
नवमो वर्गघनश्चेत्यादि घातानां क्रमेण स्मृतम्

वर्ग$y\bar{a}^2$	$y\bar{a}^2$
घन$y\bar{a}^3$	$y\bar{a}^3$
वर्गवर्ग$y\bar{a}^4$	$y\bar{a}^4$
घनवर्ग$y\bar{a}^5$	$y\bar{a}^5$
घनघन$y\bar{a}^6$	$y\bar{a}^6$
वर्गघन$y\bar{a}^6$	$y\bar{a}^6$
अष्टघात$y\bar{a}^8$	$y\bar{a}^8$
घनघनवर्ग$y\bar{a}^9$	$y\bar{a}^9$

अनेकवर्णीद्विपद्विभ्रम

द्विवर्णकं द्विपदं त्रिवर्णकं त्रिपदं तथा ।
बहुवर्णकं बहुपदं च कल्पयेत् सुबुद्धिभिः

$(a+b)(c+d)ac+ad+bc+bd$

$(a+b)\times(c+d)=ac+ad+bc+bd$

करणीसङ्कलनव्यवकलनम्

करणीसंयुक्तिरेभिः सङ्कलिता स्यात् समं करणीभिः ।
करणीभिर्विशिष्टाः पृथक् स्थापनीयाः समं करणीभिः

$\sqrt{3}+\sqrt{3}+2\sqrt{3}+5\sqrt{3}$

$$(1+1+2+5)\sqrt{3}=9\sqrt{3}$$

$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

$\sqrt{3}+\sqrt{3}+2\sqrt{3}+5\sqrt{3}$

$$(1+1+2+5)\sqrt{3}=9\sqrt{3}$$

$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

करणीगुणनम्

करणीगुणने करणीगुणने समे समे विपरे विपरे ।
गुण्यकरणीगुणककरणी गुणनफलं करणी भवति

$3\sqrt{2}4\sqrt{3}$

$$(3 \times 4) \times \sqrt{2 \times 3} = 12\sqrt{6}$$

$$a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} = (ac)\sqrt{bd}$$

$3\sqrt{2}4\sqrt{3}$

$$(3 \times 4) \times \sqrt{2 \times 3} = 12\sqrt{6}$$

$$a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} = (ac)\sqrt{bd}$$

करणीभजनम्

भजनं करण्योर्भजनं करण्योर्वर्गवत् संस्कारः ।
भाज्यकरणीभाजककरणीभागो यथोक्तक्रमेण

$12\sqrt{6}3\sqrt{2}$

$$\frac{12}{3} \times \sqrt{\frac{6}{2}} = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{a\sqrt{b}}{c\sqrt{d}} = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{b}{d}}$$

$12\sqrt{6}3\sqrt{2}$

$$\frac{12}{3} \times \sqrt{\frac{6}{2}} = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{a\sqrt{b}}{c\sqrt{d}} = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{b}{d}}$$

करणीवर्गः

वर्गः करण्याः स्यात् पदस्य वर्गः करणी चेति ।
वर्गः करण्याः स्यात् पदस्य वर्गः करणी च भवति

$\times 3\sqrt{5}$

$$(3)^2 \times 5 = 9 \times 5 = 45$$

$(3\sqrt{5})^2 = 3^2 \times (\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$

$$(a\sqrt{b})^2 = a^2 \cdot b$$

$3\sqrt{5}$

$$(3)^2 \times 5 = 9 \times 5 = 45$$

$(3\sqrt{5})^2 = 3^2 \times (\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$

$$(a\sqrt{b})^2 = a^2 \cdot b$$

करणीमूलम्

(१) वर्गं करण्या यदि वा करणीस्तु तयो रूपपक्षं वा बहूनाम् ।
विशोध्येष्टं पदं ते शेषस्य रूपाणि युतानि निपातयेत्

$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

$$x + y = a$$
$$4xy = b$$

$x - y = \sqrt{a^2 - b}$

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}$$
$$y = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

$\sqrt{a+\sqrt{b}}\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

$$x + y = a$$
$$4xy = b$$

$x - y = \sqrt{a^2 - b}$

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}$$
$$y = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

कुट्टकः

भाज्यं हरेण विभजेद् भाजकेनापवर्त्य तौ ।
यावत्तावत्प्रचलितं कुट्टकं तत्र योजयेत्

$ax \pm c = byabcxy$

ab

मतित:

$100x + 90 = 63y$

$$x = 18 + 63t$$
$$y = 30 + 100t$$

$ax \pm c = byabcxy$

ab

$100x + 90 = 63y$

$$x = 18 + 63t$$
$$y = 30 + 100t$$

वर्गप्रकृतिः

मूलं मूलं द्विगुणं युक्तं तत्प्रकृत्या हतं सहितम् ।
सर्वमूलं पुनर्मूलं ततः प्रकृतिमूलं भवेत्

$$Nx^2 + 1 = y^2$$

$$Nx^2 + 1 = y^2$$

भावना

चक्रवाल

$61x^2 + 1 = y^2$

$61x^2 + 1 = y^2$

$$x = 226153980$$
$$y = 1766319049$$

$$x = 226153980$$
$$y = 1766319049$$

चक्रवालम्

$abkNa^2 + k = b^2ma \cdot m + bk|m^2 - N|$

$$a' = \frac{am + b}{k}$$
$$b' = \frac{bm + Na}{k}$$
$$k' = \frac{m^2 - N}{k}$$

$k' = 1(a', b')$

$abkNa^2 + k = b^2mam + bk|m^2 - N|$

$$a' = \frac{am + b}{k}$$
$$b' = \frac{bm + Na}{k}$$
$$k' = \frac{m^2 - N}{k}$$

$k' = 1(a', b')$

एकवर्णसमीकरणबीजम्

रूपाणि यत्र स्युः समतुल्यानि तत्र यावत् तुल्यानि ।
यावन्ति तानि तानि विपरीतानि तुल्यानि तु तुल्यानि

संरमण

$4y\bar{a} + 7 = 2y\bar{a} + 13$

$$\begin{aligned} 4y\bar{a} - 2y\bar{a} &= 13 - 7 \\ 2y\bar{a} &= 6 \\ y\bar{a} &= 3 \end{aligned}$$

$4(3) + 7 = 192(3) + 13 = 19\checkmark$

$4y\bar{a} + 7 = 2y\bar{a} + 13$

$$\begin{aligned} 4y\bar{a} - 2y\bar{a} &= 13 - 7 \\ 2y\bar{a} &= 6 \\ y\bar{a} &= 3 \end{aligned}$$

$4(3) + 7 = 192(3) + 13 = 19\checkmark$

शेषात्समीकरणम्

यद् दातुं यद् दातव्यं तुल्यं तुल्येन संयोजयेत् ।
विपरीतानि तुल्यानि तु तुल्यानि समीकुर्यात्

$3y\bar{a} + 5 = 2y\bar{a} + 12 \Rightarrow y\bar{a} = 75y\bar{a} - 8 = 3y\bar{a} + 10$

$$5y\bar{a} - 3y\bar{a} = 10 + 8$$
$$2y\bar{a} = 18 \Rightarrow y\bar{a} = 9$$

$7y\bar{a} + 15 = 4y\bar{a} + 3$

$$3y\bar{a} = 3 - 15 = -12 \Rightarrow y\bar{a} = -4$$

$3y\bar{a} + 5 = 2y\bar{a} + 12 \Rightarrow y\bar{a} = 75y\bar{a} - 8 = 3y\bar{a} + 10$

$$5y\bar{a} - 3y\bar{a} = 10 + 8$$
$$2y\bar{a} = 18 \Rightarrow y\bar{a} = 9$$

$7y\bar{a} + 15 = 4y\bar{a} + 3$

$$3y\bar{a} = 3 - 15 = -12 \Rightarrow y\bar{a} = -4$$

असकृत्वर्गादिसमीकरणम्

वर्गो घनो वर्गवर्गोऽष्टघातो नवमो वर्गघनश्चेति ।
समीकरणं समं समं कुर्यात् समतुल्यं तु तुल्यम्

$y\bar{a}^2 - 5y\bar{a} + 6 = 0$

$$(y\bar{a} - 2)(y\bar{a} - 3) = 0$$

$\therefore y\bar{a} = 2 y\bar{a} = 3 2y\bar{a}^2 + 7y\bar{a} - 15 = 0$

$$y\bar{a} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} = \frac{-7 \pm 13}{4}$$

$\therefore y\bar{a} = \frac{3}{2} y\bar{a} = -5$

$y\bar{a}^2 - 5y\bar{a} + 6 = 0$

$$(y\bar{a} - 2)(y\bar{a} - 3) = 0$$

$\therefore y\bar{a} = 2 y\bar{a} = 3 2y\bar{a}^2 + 7y\bar{a} - 15 = 0$

$$y\bar{a} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} = \frac{-7 \pm 13}{4}$$

$\therefore y\bar{a} = \frac{3}{2} y\bar{a} = -5$

बहुवर्णसमीकरणम्

यावद् यावत् कालक नीलक पीतक हरितकादयः ।
वर्णाः समीकरणे बहुवर्णे प्रयोजयन्ते सततम्

$$\begin{aligned} 5x+3y+7 &= 3x+5y+5 \\ 2x-2y+2 &= 0 \\ x-y+1 &= 0 \\ x &= y-1 \end{aligned}$$

$\therefore yx = y-1$

$$\begin{aligned} 5x+3y+7 &= 3x+5y+5 \\ 2x-2y+2 &= 0 \\ x-y+1 &= 0 \\ x &= y-1 \end{aligned}$$

$\therefore yx = y-1$

अनेकवर्णमध्यमाहरणम्

मध्यमाहरणं तेषां यथा स्थानं प्रयोजयेत् ।
तुल्यानां तुल्यतां नीत्वा मध्यमं हरेद् बुधः

$$2x + 3y + 6 = 0$$
$$3x + 2y + 7 = 0$$
$$4x + 5y + 9 = 0$$

$$6x + 9y + 18 = 0$$
$$6x + 4y + 14 = 0$$
$$5y + 4 = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{5}$$

$x = -\frac{9}{5}$

$$2x + 3y + 6 = 0$$
$$3x + 2y + 7 = 0$$
$$4x + 5y + 9 = 0$$

$$6x + 9y + 18 = 0$$
$$6x + 4y + 14 = 0$$
$$5y + 4 = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{5}$$

$x = -\frac{9}{5}$

भावितम्

भावितं भावितं यत्र द्वयोर्वर्णयोर्गुणः ।
स्थाप्यते समतुल्यं तद् भावितं प्रचक्षते

भावितभावितसमीकरण$(2x+3)\cdot y = 62xy + 3y = 6y \neq 0$

$$x = \frac{6-3y}{2y}$$

$xy = cxy = ax + by + c$

$(2x+3)\cdot y = 62xy + 3y = 6y \neq 0$

$$x = \frac{6-3y}{2y}$$

$xy = cxy = ax + by + c$

प्रत्येकसंहारः

प्रत्येकं संहरेद् भाज्यं हरेण प्रत्येकं बुधः ।
लब्धानि यानि तान्येव मूलानि प्रत्येकशः

$100x^2 80x^2 60x^2 20x^2$

$5, 4, 3$

$100x^2 80x^2 60x^2 20x^2$

$5, 4, 3$

प्रदिशविद्यया

प्रदिशा विद्यया ज्ञेयं मूलं यत्र प्रदिश्यते ।
प्रदिशं तत्र योज्यं स्याद् विद्वद्भिरनुमीयते

प्रदिश13824

44

$20^3 = 800030^3 = 27000$

2030

$\therefore = 2424^3 = 13824$

13824

44

$20^3 = 800030^3 = 27000$

2030

$\therefore = 2424^3 = 13824$

नवीनप्रदिशविद्यया

नवीं प्रदिशमास्थाय मूलं यत् प्रदिश्यते ।
तत् सुलभं भवेत् प्राज्ञैर् विदुषां नात्र संशयः

संशोधकीयटिप्पणयः

यावत्xकालकyनीलकzपीतकuहरितकv $xyzuv$

ऋण

करणी

$Nx^2 + 1 = y^2$चक्रवाल $Nx^2 + 1 = y^2$

Bījagaṇita

The Algebra of Bhāskara II

Part II

Pages 58–114

बीजगणितम् – द्विभाषीसंस्करणम्

Bilingual Sanskrit-English Edition

अथ एकवर्णसमीकरणम्
अव्यक्तवर्गादिसमीकरणम्
अनेकवर्णसमीकरणम्

अनेकवर्णमध्यमाहरणभेदाः

1. Equations with One Unknown (Ekavarṇa-samīkaraṇa)
2. Equations with Unknown Squares (Avyakta-vargādi-samīkaraṇa)
3. Equations with Many Unknowns (Anekavarṇa-samīkaraṇa)
4. Variations of the Elimination Method (Anekavarṇa-madhyamāharaṇa-bhedāh)

Bhāskara II (1114–1185 CE)

Sanskrit text in Devanagari || English translation with IAST

Contents

Introduction 2

Chapter I: Equations with One Unknown 3

Ekavarṇa-samīkaraṇa (pp. 58–76) 3

Avyakta-vargādi-samīkaraṇa (pp. 77–95) 9

Chapter II: Equations with Many Unknowns 12

Anekavarṇa-samīkaraṇa (pp. 96–114) 12

Anekavarṇa-madhyamāharaṇa-bhedāh (pp. 107–114) 12

The Cakravāla Method (Vargaprakṛti) 13

The Bhāvita Method (Product Equations) 16

Summary 17

Introduction / प्रस्तावना

संस्कृतम्

अयं ग्रन्थः श्रीभास्कराचार्यविरचितस्य **बीजगणितस्य** द्वितीयं भागं समाविशति। बीजगणितं गणितशास्त्रस्य मूलभूतं खण्डं यत् समीकरणानां साधनं, अज्ञातराशीनां निर्णयं च व्याख्यायते। पृष्ठक्रमांक ५८--११४ पर्यन्तं चत्वारि प्रधानाध्यायानि समाविष्टानि—एकवर्णसमीकरणम्, अव्यक्तवर्गादिसमीकरणम्, अनेकवर्णसमीकरणम्, तथा अनेकवर्णमध्यमाहरणभेदाः।

English Translation

This volume contains Part II of the Bījagaṇita ("Seed Computation," i.e., Algebra) composed by Bhāskara II (1114–1185 CE). The Bījagaṇita is the foundational treatise of Indian algebra, treating equations, unknown quantities, and their solutions. Pages 58–114 encompass four principal chapters: equations with one unknown, equations with unknown squares, equations with many unknowns, and variations of the elimination method.

भास्कराचार्यस्य गणितस्य विशेषता अस्ति यत् प्रत्येकं विषयं श्लोकेन (सूत्रेण) उपदिश्य, तदनन्तरं उदाहरणैः (worked examples) सह व्याख्याति। अज्ञातराशिः यावत्तावत् ("as much as") इत्युच्यते, संक्षेपेण या अथवा याव इति लिख्यते। समीकरणानि समशोधन (elimination/equation) क्रियया साध्यन्ते।

A distinctive feature of Bhāskara's exposition is that each topic is introduced by a verse (sūtra) containing a rule, followed by worked examples (udāharaṇa) and detailed commentary (vārttika) showing the method of solution step by step. The unknown quantity is denoted by यावत्तावत् (yāvattāvat, "as much as"), abbreviated या or याव. Equations are solved by the process of sama-śodhana (making equal and clearing).

मुख्याः पद्धतयः — अस्य भागस्य प्रधानगणितपद्धतयः सन्तिः (१) **चक्रवालपद्धतिः** (cyclic method) — वर्गप्रकृतेः ($x^2 - Ny^2 = 1$) साधनार्थं भास्करस्य श्रेष्ठमल्गोरिद्मिकसिद्धान्तः; (२) **भावितपद्धतिः** — घातसमीकरणानां साधनार्थं; (३) **मध्यमाहरणम्** — बहुवर्णसमीकरणानां साधनार्थं निरसनपद्धतिः।

Key Methods treated in this part include: (1) The Cakravāla (cyclic) method — Bhāskara's greatest algorithmic achievement for solving vargaprakṛti ($x^2 - Ny^2 = 1$, Pell's equation); (2) The Bhāvita method for product equations; (3) Madhyamāharaṇa — the elimination method for equations with multiple unknowns.

Chapter I: Equations with One Unknown

एकवर्णसमीकरणम् || Ekavarṇa-samīkaraṇa

अथैकवर्णसमीकरणम्। अत्र **यावत्तावत्** एको वर्णः प्रकल्प्यते, ततो रूपैः सह समीकृत्य यावत्तावन्मानं साध्यते। राशिश्च द्विधा—स्वीकृतपक्षः (accepting side) तथा दातृपक्षः (giving side) इति। तयोः समशोधनेन मानं निर्णीयते।

Now, equations with one unknown. Here, a single unknown quantity, called yāvattāvat (यावत्तावत्, "as much as"), is postulated. Combining it with known quantities (rūpa, रूप), one forms an equation and determines the value of the unknown. Each side of the equation is called either the accepting side (what is received) or the giving side (what is given). By the process of equal-clearing (sama-śodhana), the value is determined.

Simple Linear Equation || सरलरेखीयसमीकरणम्

उदाहरणम् — अत्राश्वमूल्यमज्ञातं तस्य मानं यावत्तावत् एकं प्रकल्प्तं या १। तदा श्रेणीशकं यदेकस्य यावत्तावन्मूल्यं तदा पणां किमिति कल्पितच्छागपणां प्रमाणमकं लब्धं पणामश्वानां मूल्यम्। या ६। अत्र रूपातनये प्रक्षिप्ते जातमाश्वस्य धनं या ६ रूप २०। एवं दशानां मूल्यं या १०। अत्र रूपाते चाणांते प्रक्षिप्ते जातं द्वितीयस्य धनं या १० रूप १००।

Example — Here, the price of a horse is unknown; let its value be one yāvattāvat, written yā 1. If the price of one horse equals the price of so many goats, then the price in coins is determined. For one horse: yā 6. Adding twenty coins (rūpa), the first person's wealth becomes: yā 6, rūpa 20. The price of ten horses is yā 10. Adding one hundred coins, the second person's wealth becomes: yā 10, rūpa 100.

समशोधनम् — एतौ समशोधने छते एव सभी जाते समशोधनार्थं—

न्यासः---या ६ रूप २०
या १० रूप १००

Equal-clearing — These two are made equal for clearing:

Setting down: yā 6, rūpa 20
yā 10, rūpa 100

नियमः — अथैकाव्यक्त शोधयेदन्यपक्षादव्ययव्यक्तान्। छोधिते द्वितीयपदमुक्त्वेषु आचयपक्षतुल्यपक्षः शोधितेषु शेषं रूप ४००। अथ कल्पितकलवर्ण या ४ रूपैः रूप ४०० उक्ते लब्धमेकस्य यावत्तावतो मानं व्यक्तं १००।

Rule — One should clear the unknown from one side, and the known from the other side. When cleared, the remainder on the other side is rūpa 400. Then, dividing rūpa 400 by the coefficient of the unknown (yā 4), the value of one yāvattāvat is obtained as 100. Thus the price of one horse is 100 (coins).

Example: Jewels and Wealth / रत्नधनस्योदाहरणम्

मणिक्यामल्नीलमौक्तिककिमितिः
पञ्चाषसममा—
देकस्यान्यतरस्य सप्त नव पट् तद्दलसंख्या सखे।
रूपाणां नवतिद्विषष्ठिर्नयोस्तौ तुल्यवित्तौ तथा
वीजं प्रतिरुज्ञानि कुरुते मौल्यानि शीघ्रं वद ॥३॥

Verse 3: Jewels and Equal Wealth

"The measures of ruby, sapphire, pearl, and emerald of one are fifty, seven, nine, and half that number, O friend. Their total wealth is one hundred sixty-two coins each. Tell me quickly the prices, O algebraist, that make them equal."

Solution: Let the prices of ruby etc. be yā(1) 3, yā 2, yā 1. The two sides become:

yā 19, yā 16, yā 7, rūpa 90
yā 21, yā 18, yā 6, rūpa 62

By equal-clearing, the value of yāvattāvat is 4. The prices of jewels are 12, 8, 4.

एको द्वीति मम द्विहि शतं धनेन
त्वत्तो भवामि हि सखे द्विगुणस्ततोऽस्यः।
भूते द्वयोर्यदसि वैनम बहुगुणोऽहं
त्वत्तस्तयोर्वद धने मम किं प्रमाणे ॥४॥

Verse 4: The Merchant's Wealth

"If you give me one hundred, O friend, I become twice as rich as you. But if I give you two hundred, I become some multiple. Tell me, what are our respective measures of wealth?"

Solution: Let the two merchants' wealth be yā 1 and yā 1. After giving 100, the first becomes twice the second: yā 1, rūpa 100 = yā 2, rūpa 200. By clearing: yā 4, rūpa 300, whence yā = 75. The wealths are 40 and 170.

Quadratic and Higher Equations / वर्गसमीकरणम्

उदाहरणम् — राशिद्वैदशानिशं राशिद्वयनाल्यक्ष कः समो यः स्यात्। राशिकृतिः बहुगुणिता पञ्चत्रिंशद्युता विद्ध ॥६॥

Example — "A certain number when multiplied by twelve and added to its own square equals thirty-five. What is that number?" Let the number be yā 1. Then: 12yā + yāvarga 1 = 35. Clearing gives sides: yāv 1, yā 12, rūpa 0 and rūpa 35. Extracting the square root: yā 1, rūpa 2 and rūpa 3. From the equation of these, the number is 5.

वर्गपूरणनियमः — एषां पूर्वमूलानां च सर्वेषां योगः = याव ३ या ३१ रूप ८८। इदमेकाद्वययुतं प्रयोदशवर्गं—

याव ३ या ३१ रूप ७५
याव ० या ० रूप १६९

Rule for Completion of the Square: The sum of all these roots = yāv 3, yā 31, rūpa 88. Adding an increment to make a perfect square:

yāv 3, yā 31, rūpa 75
rūpa 169

Equating and multiplying both sides by twelve, taking the double-root from the square 169, the roots are yā 6, rūpa 31 and rūpa 43.

The Lotus and the Swallow / हंसपद्मोदाहरणम्

उदाहरणम् — अत्र वा प्रथमप्रमाणकलं द्वितीयप्रमाणकलं विमले प्रलम्बये तद्गुणगुणितेन द्वितीयमूललेन तुल्यमेव प्रथममूलधनं स्यात्। अतो द्वितीयस्यायं गुणः २।

Example: The Lotus and the Swallow — Here, the difference of the two root-measures, multiplied by the product of the multiplier, equals the second root-wealth. The multiplier of the second is 2. If the first root-wealth equals the product of one multiplier and the second root-wealth, divided by the square of the difference, then the difference of measures is 4. Thus the first and second root-wealths are 8 and 4, yielding a result of 2.

एकक्रान्तर्चयनात् फलस्य वर्गं विशोध्य परिशिष्यम्।
पञ्चक्रान्तेन दत्तं तुल्यः कालः फले च तथैः ॥८॥

Verse 8: The Lotus Problem

"Having subtracted the square of the result from the first increased [quantity], the remainder, divided by five, gives equal time and result."

Solution: The multiplier is 5. Dividing by the decreased multiplier (4), the square of the small difference (16) divides the second wealth, yielding 4. Adding the square of the difference gives the first wealth as 20. By the rule of proportion, time = 20.

Four Merchants with Equal Wealth / चत्वारो वणिजः समधनाः

माणिक्याणुकणिनीलादीनां मुक्ताफलानां शतं
षड्भागि च पञ्च रत्नवीरां येषां चतुर्णां धनम्।
संग्रहे हयरैन ते निजधनाद्वेकैक मिथो
जातास्तुल्यधनाः पृथग्वद सखे तद्दनमैल्यानि मे ॥२॥

Verse 2: Four Merchants of Equal Wealth

"Of rubies, coral, sapphires, pearls, and emeralds, there are one hundred; six parts and five jewels. Four merchants whose wealth, when one gives to another, they become equal. Tell me separately, O friend, the prices of their wealth."

Method: The unknowns are postulated as yāvattāvats. After four equal-clearings, the root is obtained by intelligent reasoning. As Bhāskara himself says:

> "Neither squared nor unsquared is the seed; seeds are not separate. Intelligence alone is the seed, for endless are the suppositions."

Geometric Application: Equilateral Triangle / समभुजत्रिकोणस्य क्षेत्रव्यवहारः

न्यासः — क्षेत्रव्यवहारात् समभुजत्रिकोणस्य जाते लम्बवर्गः = याव १ रूप १५, रूप २००। या १ या १ क १८ रूप १। द्वितीयाव्यावावर्गौ = याव १ या क ६२ या २ रूप १९ क ६२।

Setting Down: From geometric computation for an equilateral triangle, the square of the altitude is: yāv 1, rūpa 15, rūpa 200, or yā 1, kā 18, rūpa 1. The second altitude-square is: yāv 1, yā kā 62, yā 2, rūpa 19, kā 62. Subtracting the base 6, the second altitude-square becomes: yāv 1, yā 2, yā kā 62, rūpa 13, kā 62.

समशोधनम् — एतौ समाविति समशोधने छते जाते पक्षौ—

र २५ क ५१२
या २ या क ६२

Equal-clearing: These being made equal, the sides after clearing are:

rūpa 25, kā 512
yā 2, yā kā 62

Equations with Unknown Squares / अव्यक्तवर्गादिसमीकरणम्

सूत्रम् —

अव्यक्तवर्गादि यदा द्वयोः पक्षौ तदैकेन निःशेषं किंचित्।
क्षेपं तयोरेन पदप्रदः स्याद्व्यक्तः सहेत परेन भूयः ॥१॥

व्यक्तस्य मूलस्य समीकृते समव्यक्तमानं बहु लभ्यते तत्।
न निर्वहेत् चेद्धनवर्गयोस्त्वेति तदा क्षेपमिदं स्यबुद्ध्या ॥२॥

Rule (Verses 1–2): —

When unknown squares appear on both sides,
divide by something to make one side a perfect square.
The additive must be such that it yields
a rational root when combined with the known term.

When the root of the known is equated,
many unknown values may be obtained;
if the square does not succeed,
then by intelligence determine the additive.

अव्यक्तमूलकांक ततोऽस्य व्यक्तस्य पक्षस्य पदं यदि स्यात्।
मूलं धनं तथा विधाय साव्यमव्यक्तमानं द्विधा कल्पितं स्यात्॥३॥

Verse 3:

If the root of the unknown side, having a number,
when made the root of the known side—
having made that root positive or negative,
the unknown value is to be assumed twofold.

Example: Series of Numbers / राशिश्रेण्युदाहरणम्

स्वार्धपञ्चाशनवमैर्युक्ताः के स्युः समाश्रयाः।
अन्यैर्द्वादशहीनाख्य परिशिष्टाख्य तान् वद ॥१४॥

Verse 14: Numbers with Fractional Relations

"What numbers, when increased by their own half, five-ninths, and [other fractions], become equal? And when diminished by others, twelve less—tell me the remainders."

Solution: Let the equal number be yāvattāvat 1. By the reverse process, the numbers are yā $\frac{2}{5}$, yā $\frac{5}{6}$, yā $\frac{9}{10}$. Dividing by the greatest common measure and multiplying by yāvattāvat value 150, the numbers are 100, 125, 135.

त्रयोदश तथा पञ्च करण्यो मूजयोनितो।
भूजाता च चत्वारः फले भूमिं वदाऽखु मे ॥१५॥

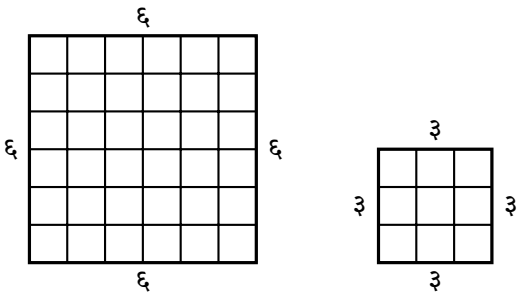
Verse 15: The Excavated Plot

"The square-roots of thirteen and five, diminished by the base, and four as the result—tell me the area, O algebraist."

Solution: Let the area be yāvattāvat 1. By the formula "altitude times half-base divided [equals the area of a triangle]," the section-ratio is kā $\frac{5}{13}$. Its square is kā 5. Subtracting from rūpa 5, rūpa $\frac{5}{13}$, the root gives the altitude kā $\frac{5}{13}$.

Geometric Diagrams / क्षेत्रचित्राणि

क्षेत्राणि — तेषां स्वरूपाणि यथा—



Geometric Figures: Their forms are as follows:

Square of side 6 Square of side 3

The large square is 36 units in area; the small square is 9 units. The difference is 27, which may be analyzed as the sum of gnomon regions.

चतुर्गुणस्य
घातस्य
युतिवर्गस्य
चान्तरम्।
राश्यन्तरकृतेस्तुल्यं
द्वयोरन्त्यकयोर्यथा
॥१७॥

Verse 17:

The difference between
the square of the sum
and four times the product
equals the square of the
difference of the two
numbers,
as between the last two
terms.

Numerical verification:
For numbers 3 and 5:
$(3+5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 =$
$64 - 60 = 4 = (5-3)^2$.
This is the algebraic
identity:
$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$.

Chapter II: Equations with Many Unknowns

अनेकवर्णसमीकरणम् || Anekavarṇa-samīkaraṇa

अथानेकवर्णसमीकरणम्।
अत्र बहूनां यावत्तावतां सहचरितानां समीकरणं दीयते। यदा बहूनामज्ञातानां राशीनां मूल्यानि निर्णेतव्यानि भवन्ति, तदा प्रत्येकं राश्यै यावत्तावत् प्रकल्प्यते। तदनन्तरं कुट्टकविधिना मानानि निर्णीयन्ते।

Now, equations
with many unknowns.
Here, equations are given
involving several
associated yāvattāvats.
When the values of many
unknown quantities must
be determined, a
yāvattāvat is postulated
for each quantity.
Thereafter, the values are
determined by the kuṭṭaka
(pulverizer) method.

मुख्यनियमः — अत्र माणिक्यादीनां मौल्यानि यावत्तावदादीनि प्रकल्प्य तद्गुणपरितसंख्यां च छत्वा रूपाणि च प्रक्षिप्य समशोधनार्थं—

न्यासः---या ५ का ८ नी ३ रूप १०
या ३ का ९ नी ५ रूप ६२

Main Rule: Let the prices
of rubies etc. be
postulated as yāvattāvats
etc., and multiplying by
their respective
coefficients and adding
rūpas, for equal-clearing:

Setting down: yā 5, kā 8,
nī 3, rūpa 10
yā 3, kā 9, nī 5, rūpa 62

The Cakravāla (Cyclic) Method || चक्रवालपद्धतिः

चक्रवालपद्धतिः — वर्गप्रकृति इत्युक्ते $x^2 - Ny^2 = 1$ रूपं समीकरणं यत्र N अज्ञातवर्गे कारः (गुणकः), x प्रकृतिः (ज्येष्ठमूलम्), y ह्रस्वम् (कनिष्ठमूलम्)। भास्कराचार्यस्य **चक्रवालपद्धतिः** अस्मिन् समीकरणे साधने सर्वोत्तमा अल्गोरिद्मिकपद्धतिः अस्ति। इयं पद्धतिः सदैव परिसमाप्तिं गच्छति तथा च न्यूनतमं समाधानं प्रयच्छति।

The Cakravāla (Cyclic) Method: The vargaprakṛti is the equation $x^2 - Ny^2 = 1$, where N is the kāraṇa (multiplier/prakṛti), x is the jyeṣṭha-mūla (greater root), and y is the kaniṣṭha-mūla (lesser root). Bhāskara's Cakravāla ("cyclic") method is the supreme algorithmic procedure for solving this equation. This method always terminates and produces the minimal solution.

चक्रवालस्य पद्धतिः —

1. मूलस्य ($\sqrt{N}$) समीपतमं पूर्णाङ्कं गृहाण।
2. प्रथमं समीकरणं रचयः $a^2 - N \cdot 1^2 = k$, यत्र a समीपतमपूर्णाङ्कं, k क्षेपः।
3. ततः $b = \dfrac{a+m}{|k|}$ गणय, यत्र m अनेन प्रकारेण वृत्यते यत् $a + m \equiv 0 \pmod{|k|}$ तथा च $m^2 - N$ न्यूनतमं भवति।
4. नवीन समीकरणं रचयः $a_{\text{new}}^2 - N \cdot b^2 = k_{\text{new}}$।
5. यदा $k_{\text{new}} = 1, 2, -1, -2, 4, -4$ भवति, तदा भावना (composition) क्रियते।
6. अन्यथा चक्रं पुनः आरभ्यते।

The Cakravāla Procedure:

1. Take the integer nearest to $\sqrt{N}$.
2. Form the first equation: $a^2 - N \cdot 1^2 = k$, where a is the nearest integer, k is the additive (kṣepa).
3. Compute $b = \dfrac{a+m}{|k|}$, where m is chosen such that $a + m \equiv 0 \pmod{|k|}$ and $m^2 - N$ is minimized.
4. Form the new equation: $a_{\text{new}}^2 - N \cdot b^2 = k_{\text{new}}$.
5. When $k_{\text{new}} = 1, 2, -1, -2, 4, -4$, apply bhāvanā (composition).
6. Otherwise, repeat the cycle.

The Famous Example $N = 61$ / प्रसिद्धमुदाहरणम् $N = 61$

उदाहरणम् — "एकषष्टिप्रकृतिः'' इति प्रसिद्धमुदाहरणं भास्कराचार्यस्य अस्ति। अत्र $N = 61$। एतत् समीकरणं $x^2 - 61y^2 = 1$ इत्यस्य न्यूनतमं समाधानं अत्यन्तं विस्तृतं जातं यत् पूर्वं यावद्ब्रह्मगुप्तस्य कालपर्यन्तं कठिनतमं मन्यते स्म।

Example: The "prakṛti sixty-one" is Bhāskara's most celebrated example. Here $N = 61$. The minimal solution of $x^2 - 61y^2 = 1$ is enormously large, and was considered the most difficult case from the time of Brahmagupta until Bhāskara.

चक्रवालस्य परिक्रमाः —

चक्रम्	गुणकः	ज्येष्ठम्	कनिष्ठम्	क्षेपः	वृत्तिः
१	६१	८	१	-१३	प्रारम्भः
२	६१	४७	६	७	चक्रम्
३	६१	४८	७	-१३	चक्रम्
४	६१	६३	८	-४	भावना
५	६१	११९	१५	४	भावना
६	६१	३९७	५१	-४	भावना
७	६१	१३२३	१७०	७	चक्रम्
८	६१	१३२४	१७१	-१३	चक्रम्
९	६१	१८९१	२४२	७	चक्रम्
१०	६१	२८५६	३६५	-३	चक्रम्
११	६१	२८५७	३६६	-१	समाप्तिः

Cycles of the Cakravāla:

Cycle	Prakṛti N	Jyeṣṭha a	Kaniṣṭha b	Kṣepa k	Operatio
1	61	8	1	-13	Initiatio
2	61	47	6	7	Cycle
3	61	48	7	-13	Cycle
4	61	63	8	-4	Bhāvanā
5	61	119	15	4	Bhāvanā
6	61	397	51	-4	Bhāvanā
7	61	1323	170	7	Cycle
8	61	1324	171	-13	Cycle
9	61	1891	242	7	Cycle
10	61	2856	365	-3	Cycle
11	61	2857	366	-1	Terminati

Final Composition: The Solution / अन्तिमभावना: समाधानम्

समाधानम् — यदा क्षेपः $k = -1$ प्राप्यते (चक्रे ११), तदा भावनया सह सम्पूर्णं समाधानं प्राप्यते। अन्तिमे समीकरणे $2857^2 - 61 \cdot 366^2 = -1$ भवति। अस्य वर्गीकरणेन ($k = -1$ इत्यस्य द्विवारं प्रयोगेन) $k = 1$ प्राप्यते।

अतः न्यूनतमं समाधानम्:

$$\boxed{\text{ज्येष्ठमूलम्}\ x = 1{,}766{,}319{,}049}$$

$$\boxed{\text{कनिष्ठमूलम्}\ y = 226{,}153{,}980}$$

सत्यापनम्:

$$1{,}766{,}319{,}049^2 - 61 \cdot 226{,}153{,}980^2 = 1$$

The Solution: When the additive $k = -1$ is reached (at cycle 11), the complete solution is obtained by bhāvanā (composition). The final equation yields $2857^2 - 61 \cdot 366^2 = -1$. Squaring this (applying $k = -1$ twice) gives $k = 1$.

The minimal solution is:

$$\boxed{\text{Greater root}\ x = 1{,}766{,}319{,}049}$$

$$\boxed{\text{Lesser root}\ y = 226{,}153{,}980}$$

Verification:

$$1{,}766{,}319{,}049^2 - 61 \cdot 226{,}153{,}980^2 = 1\ \checkmark$$

Historical Note: This solution was not matched in Europe until the work of Fermat, Brouncker, and Wallis in the 17th century. Bhāskara's Cakravāla algorithm always terminates—a fact that was only rigorously proved in the 20th century by Krishnaswami Alladi. The method is superior to the European "chain method" of Brouncker in both elegance and efficiency.

The Bhāvita Method || भावितपद्धतिः

भावितपद्धतिः — भावित इत्युक्ते द्वयोः अज्ञातराश्योः घातः (product)। यदा समीकरणे द्वयोः वर्णयोः गुणनफलं प्रविष्टं भवति, तदा भावितपद्धतिः प्रयुज्यते। अस्याः पद्धतेर्मुख्यं प्रयोजनं वर्गप्रकृतेः समाधानेषु भावनायाः (composition) क्रियायां विद्यते।

The Bhāvita Method: Bhāvita means the product of two unknown quantities. When the product of two unknowns appears in an equation, the bhāvita method is applied. The principal application of this method is in the bhāvanā (composition) operation for solving the vargaprakṛti.

भावनानियमः — यदि (a, b, k) तथा (A, B, K) द्वे वर्गप्रकृतिसमाधाने स्तः, अर्थात् $a^2 - Nb^2 = k$ तथा $A^2 - NB^2 = K$, तदा भावनया नवीनं समाधानं प्राप्यते:

$$\boxed{x = aA \pm NbB, \quad y = aB \pm Ab}$$

यस्य क्षेपः नवीनं समीकरणं $x^2 - Ny^2 = kK$ सन्तोषयति।

The Bhāvanā Rule: If (a, b, k) and (A, B, K) are two solutions of the vargaprakṛti, i.e., $a^2 - Nb^2 = k$ and $A^2 - NB^2 = K$, then by bhāvanā a new solution is obtained:

$$\boxed{x = aA \pm NbB, \quad y = aB \pm Ab}$$

whose additive satisfies the new equation $x^2 - Ny^2 = kK$.

Special Case: When $k = K = 1$, the product $kK = 1$, so the composed solution directly solves $x^2 - Ny^2 = 1$. When $k = K = -1$, then $kK = 1$ again, so two solutions with additive -1 compose to a solution with additive $+1$. This is the key to terminating the Cakravāla method.

Summary of Part II / द्वितीयभागस्य संक्षेपः

समीकरणविधयः — अस्य भागे निम्नलिखिताः प्रधानगणितविधयः उपदिष्टाः सन्तिः

1. **एकवर्णसमीकरणम्** — रेखीयसमीकरणानां, वर्गसमीकरणानां च साधनम्।
2. **अव्यक्तवर्गादिसमीकरणम्** — अज्ञातवर्गयुक्तसमीकरणानां साधनम्।
3. **अनेकवर्णसमीकरणम्** — बहुवर्णसमीकरणानां कुट्टकविधिना साधनम्।
4. **मध्यमाहरणम्** — मध्यमवर्णस्य निरसनपद्धतिः।
5. **चक्रवालपद्धतिः** — वर्गप्रकृतेः ($x^2 - Ny^2 = 1$) सर्वोत्तमा साधनपद्धतिः।
6. **भावितपद्धतिः** — द्विवर्णघातसमीकरणानां तथा भावनायाः क्रिया।

भास्करस्य योगदानम् — भास्कराचार्यस्य **चक्रवालपद्धतिः** गणितस्य इतिहासे अत्यन्तं महत्त्वपूर्णा अस्ति। इयं पद्धतिः—

- सदैव परिसमाप्तिं गच्छति (always terminates)
- न्यूनतमं समाधानं प्रयच्छति (produces the minimal solution)
- युरोपीयपद्धतेः अपेक्षया अधिकतया कुशला (more efficient than European methods)
- आधुनिकअल्गोरिद्मिकविश्लेषणस्य आधारभूता (foundational for modern algorithmic analysis)

Equation Methods: In this part, the following principal mathematical methods are taught:

1. Equations with One Unknown — solution of linear and quadratic equations.
2. Equations with Unknown Squares — solution of equations containing unknown squares.
3. Equations with Many Unknowns — solution by the kuṭṭaka (pulverizer) method.
4. Elimination of the Middle — the method of eliminating the middle unknown.
5. The Cakravāla Method — the supreme method for solving $x^2 - Ny^2 = 1$.
6. The Bhāvita Method — product equations and the composition operation.

Bhāskara's Contribution: Bhāskara's Cakravāla method is one of the most significant achievements in the history of mathematics. This method:

- Always terminates (always terminates)
- Produces the minimal solution (produces the minimal solution)
- Is more efficient than European methods of the 17th century (more efficient than European methods)
- Is foundational for modern algorithmic analysis (foundational for modern algorithmic analysis)

End of Part II || द्वितीयभागसमाप्तिः

Pages 58–114 of the Bījagaṇita

To be continued in Part III (pages 115–170)

Bilingual Sanskrit-English Edition
Sanskrit text: Devanagari || English: IAST transliteration
Compiled from the Sanskrit edition of
Shri Bhaskaracharya
Circa 1150 CE